

Trupmeninio Gauso triukšmo sąlygoti taškiniai procesai

Point processes driven by fractional Gaussian noise

Aleksejus Kononovicus, Rytis Kazakevičius, Bronislovas Kaulakys

Vilniaus universitetas, Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Saulėtekio al. 3, 10257 Vilnius
aleksejus.kononovicus@tfai.vu.lt

Modeliuojant daugelį sistemų daroma Markovo prielaida. Tariama, kad sistemos ateičiai svarbi tik dabartinė sistemos būseną. Visgi yra sistemų, kurių dinamikai įtaką turi ir sistemos trajektorija (ankstesnės būsenos). Sakoma, kad sistema turi ilgą atmintį, jei jos dinamiką nusakančių laiko eilučių autokoreliacijos funkcijos gęsta laipsniškai lėtai. Įdomu tai, kad tokių sistemų sutinkame tiek fizikoje, tiek kituose moksluose.

Egzistuoja modeliai (pvz., ARCH modeliai ar trupmeninis Brauno judėjimas) kurie ilgą atmintį įskaito tiesiogiai. Tuo tarpu mūsų grupės kuriami modeliai ilgą atmintį atkuria nepažeisdami Markovo prielaidos [1]. Pirmieji mūsų grupės modeliai buvo paremti taškiniu procesu, kuris buvo pasiūlytas [2] darbe. Vėliau šis modelis buvo apibendrintas ir užrašytas kaip netiesinė stochastinė diferencialinė lygtis, kurios laipsninės statistinės savybės buvo detalios išanalizuotos tiek analiziškai, tiek skaitmeniškai [1]. Šiame darbe mes apibendriname šį taškinį procesą pažeisdami Markovo prielaidą.

Taškinis procesas yra sudarytas iš daugelio atskirų įvykių (pvz., fotonų kontaktas su detektoriumi ar sandoris finansų rinkose), kurių profilių (išmatuojamų įvykio poveikių) suma nusako proceso laiko eilutę:

$$x(t) = \sum_k A_k(t - t_k). \quad (1)$$

Čia $A_k(t)$ yra k -tojo įvykio, kuris įvykio laiku t_k , profilis. Paprastumo dėlei tarkime, kad visų įvykių profiliai yra vienodi ir yra Kronekerio delta funkcijos formos, $A_k(t) = \delta(t)$. Tokiu atveju taškinį procesą pilnai nusako įvykių laikų rinkinys $\{t_k\}$ arba tarplaikių rinkinys $\{\tau_k = t_{k+1} - t_k\}$.

[2] darbe pasiūlyta tarplaikių pokyčius modeliuoti naudojant standartinį nekoreliuotą Gauso triukšmą, ε_k :

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \sigma \cdot \varepsilon_k. \quad (2)$$

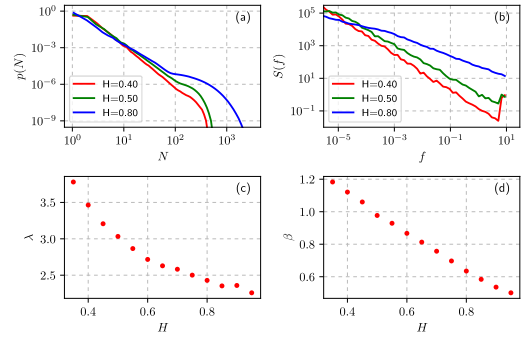
Pagal apibrėžimą tarplaičiai negali būti neigiami, tad sprendžiant šią iteracinę lygtį yra naudojama minkšta atspindinti kraštinė sąlyga iš mažų verčių pusės: jei $\tau_k < \tau_{min}$, tai $\tau_k = \tau_{min}$ (čia τ_{min} yra mažas teigiamas skaičius). Tarplaikių difuziją būtina apriboti ir iš didelių verčių pusės. Tam taip pat naudojame minkštą atspindinčią kraštinę sąlygą ties τ_{max} . Tokiu atveju τ_k procesas tampa stacionarus, o jo skirstinys yra tolygus intervale $[\tau_{min}, \tau_{max}]$. Šis elementarus taškinis procesas yra įdomus, nes jo laiko eilutė $x(t)$ pasižymi ilgą atmintimi ($S(f) \sim 1/f$), nors Markovo prielaida nėra pažeidžiama.

Mes nekoreliuotą Gauso triukšmą pakeičiame trupmeniniu Gauso triukšmu (su Hursto rodikliu H):

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \sigma \cdot \varepsilon_k^{(H)}. \quad (3)$$

$H = 0.5$ atvejis yra ekvivalentus originaliam modeliui su nekoreliuotu triukšmu. $H < 0.5$ atveju procesas yra anti-koreliuotas, o $H > 0.5$ atveju – koreliuotas. Toks modelio apibendrinimas leidžia nagrinėti modelį, kuriame Markovo prielaida pažeidžiama tolydžiai.

Mes atlikome skaitmeninę modelio laiko eilučių analizę $H \in [0.35, 0.95]$ srityje. Mažesnėms H vertėms triukšmo anti-koreliacija lemia lėtą τ_k difuziją. Didelių verčių atveju dėl stiprios triukšmo koreliacijos procesas labai ilgiems laiko tarpams užstringa greta vienos arba kitos kraštinės sąlygos.



1 pav. Triukšmo Hursto rodiklio įtaka modelio įvykių skaičiaus skirstiniui ((a), (c)) ir $x(t)$ galios spektriniam tankiui ((b), (d)).

Paveiksle matome, kad triukšmo H turi netrivialią įtaką įvykių skaičiaus skirstiniui ir $x(t)$ galios spektriniam tankiui. Abi šios statistinės savybės turi laipsninį pobūdį: $p(N) \sim N^{-\lambda}$ ir $S(f) \sim f^{-\beta}$. Laipsnio rodikliai, λ ir β , priklauso nuo H .

Skaitmeninis apribotos trupmeninės difuzijos savybių tyrimas yra aktuali pastarojo meto problema [3–5]. Mūsų skaitmeninė analizė patvirtina anksčiau gautus rezultatus, bei juos išplečia į įvykių erdvę. Apibendrintas modelis leis tyrinėti kaip kinta modelio ilgos atminties savybės palaipsniui pažeidžiant Markovo prielaidą, bei ieškoti būdų kaip atskirti “tikros” ilgos atminties procesus nuo Markovo procesų.

Reikšminiai žodžiai: ilgą atmintis, taškiniai procesai, trupmeninė difuzija

Literatūra

- [1] R. Kazakevičius *et al.*. Entropy 23: 1125 (2021).
- [2] B. Kaulakys, T. Meskauskas. Phys Rev E 58: 7013–7019 (1998).
- [3] T. Guggenberger *et al.*. New J Phys 21: 022202 (2019).
- [4] A. Wada *et al.*. J Stat Mech 2019: 033209 (2019).
- [5] T. Vojta *et al.*. Phys Rev E 102: 032108 (2020).