Bendro pavidalo bekoordinatės multivektorių eksponenčių formulės Cliffordo algebrose $Cl_{p,q}$ kai $p+q=3$

Coordinate-free exponentials of general multivector in $Cl_{p,q}$ algebras for $p+q=3$

Artūras Acus[1], Adolfas Dargys[2]
[1]Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Vilniaus universitetas, Saulėtekio 3, LT-10257 Vilnius
[2]Nacionalinis fizinių ir technologijos mokslų centras, Puslaidininkių fizikos institutas, Saulėtekio 3, LT-10257 Vilnius
arturas.acus@tfai.vu.lt

Geometrinė algebra (matematikų vadinama Cliffordo algebra) apibendrina gerai žinomą vektorinį skaičiavimą, kuris plačiai naudojamas fizikoje. Jei vektorinis skaičiavimas tinka tik trimatėms erdvėms, tai įvedus multivektorius su geometrine algebra skaičiavimus galima atlikti bet kokios dimensijos ir signatūros erdvėse, tarp jų ir reliatyvistiniame erdvėlaikyje.

Bendros formos multivektoriaus eksponentės radimas geometrinėje algebroje tebėra neišspręsta ir labai aktuali problema tiek matematikoje, tiek fizikoje [2, 3]. Tam pakanka prisiminti diferencialines lygtys, kurių sprendiniai yra eksponentės nuo multivektoriaus. Pranešime pateikiamos ir įrodomos bendriausių multivektorių eksponenčių išraiškos algebroms $Cl_{0,3}$, $Cl_{3,0}$ bei $Cl_{1,2}$ ir $Cl_{2,1}$, kurias kiek anksčiau esame užrašę koordinatiniu pavidalu [1]. Algebra $Cl_{1,2}$ yra izomorfiška $Cl_{3,0}$, todėl bekoordinatiniu pavidalu užrašytos formulės joms yra vienodos (tačiau koordinatiniai pavidalai skiriasi ženklais). Pranešime yra pateikiamos visų išvardytų algebrų eksponenčių bekoordinatinės išraiškos.

Bekoordinatiniu pavidalu bendriausią multivektorių $n=3$ algebrose galima užrašyti kaip skaliaro a_0, vektoriaus $\mathbf{a}$, bivektoriaus $\mathcal{A}$ ir pseudoskaliaro $a_{123}I$ sumą

$$\mathsf{A} = a_0 + \mathbf{a} + \mathcal{A} + a_{123}I\,.$$

Bivektorių $\mathcal{A} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ galima įsivaizduoti kaip orientuotos plokštumos, statmenos vektorių $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$ vektorinei sandaugai, plotelį. Pseudoskaliaras I yra suprantamas kaip 3D erdvės vienetinis orientuotas tūrio elementas. Paprasčiausia eksponentės formulė gaunama $Cl_{0,3}$ algebrai. Ji tokia paprasta, kad tinka užrašyti ir tezių tekste:

$$\begin{aligned}\exp(\mathsf{A}) =&\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a_0}\Big(\mathrm{e}^{a_{123}}(1+I)\big(\cos a_+ + \frac{\sin a_+}{a_+}(\mathbf{a}+\mathcal{A})\big)\\ &+\mathrm{e}^{-a_{123}}(1-I)\big(\cos a_- + \frac{\sin a_-}{a_-}(\mathbf{a}+\mathcal{A})\big)\Big).\end{aligned}$$

Čia a_- ir a_+ yra skaliarai, o a_i ir a_{ij} – vektorių ir bivektorių projekcijos,

$$\begin{aligned}a_- =&\sqrt{-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{A})+2I\mathbf{a}\wedge\mathcal{A}}\\ =&\sqrt{(a_3+a_{12})^2+(a_2-a_{13})^2+(a_1+a_{23})^2},\\ a_+ =&\sqrt{-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{A})-2I\mathbf{a}\wedge\mathcal{A}}\\ =&\sqrt{(a_3-a_{12})^2+(a_2+a_{13})^2+(a_1-a_{23})^2}\,,\end{aligned}$$

Ženklai $\cdot$ bei $\wedge$ šioje formulėje žymi atitinkamai vidinę (skaliarinę, simetrinę) ir išorinę (vektorinę, antisimetrinę) sandaugas. Tuo tarpu paprastą daugybą reikia suprasti kaip geometrinę sandaugą, kuri savyje apjungia dvi prieš tai paminėtas sandaugas.

Panašios elegantiškos formulės gaunamos ir $Cl_{3,0}$ bei $Cl_{2,1}$ algebroms.

Pavyzdys. Užrašykime eksponentę multivektoriui $\mathsf{A} = -8 - 6\mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_{12} - 5\mathbf{e}_{13} + 6\mathbf{e}_{23} - 4\mathbf{e}_{123}$, kur $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{ij}, I = \mathbf{e}_{123}\}$ žymi, atitinkamai, bazinius vektorius, bivektorius ir bazinį trivektorių. Gauname $a_- = \sqrt{53}$, $a_+ = \sqrt{353}$. Visas atsakymas yra

$$\begin{aligned}&\exp(\mathsf{A}) = \tfrac{\mathrm{e}^{-8}}{2}\Big(\mathrm{e}^{4}(1-\mathbf{e}_{123})\\ &\times\Big(\cos\sqrt{53}+\tfrac{\sin\sqrt{53}}{\sqrt{53}}(-6\mathbf{e}_2-9\mathbf{e}_3+5\mathbf{e}_{12}-5\mathbf{e}_{13}+6\mathbf{e}_{23})\Big)\\ &+\mathrm{e}^{-4}(1+\mathbf{e}_{123})\\ &\times\Big(\cos\sqrt{353}+\tfrac{\sin\sqrt{353}}{\sqrt{353}}(-6\mathbf{e}_2-9\mathbf{e}_3+5\mathbf{e}_{12}-5\mathbf{e}_{13}+6\mathbf{e}_{23})\Big)\Big).\end{aligned}$$

Norėdami gauti šį atsakymą skaitiškai šešių ženklų tikslumu (t.y. apytiksliai) pasinaudodami eksponentės eilutės kurios elementai yra multivektoriai, skleidiniu turėtume sumuoti 70 tos eilutės narių. Maža to iš pradžių matytume, kad sumuojant vis daugiau narių rezultatas nepaprastai sparčiai didėja, ir tik sumuojant toliau ima artėti prie tikrosios vertės. Priminsime, kad eksponentės eilutės konvergencijos radiusas yra begalinis, todėl rezultatas, griežtai kalbant, negali diverguoti.

Pranešime pateikiamas formules lengva suprogramuoti, ką mes ir realizavome geometrinės algebros skaičiavimams skirtame programoje [4]. Žinant eksponenčių išraiškas jau nesunku užrašyti ir tikslias hiperbolinių ir trigonometrinių (pastarąsias galima užrašyti tik $Cl_{3,0}$ ir $Cl_{1,2}$ algebrose) funkcijų formules.

Reikšminiai žodžiai: Geometrinė (Cliffordo) algebra, multivektorių eksponentės, kompiuterinės algebros sistema

Literatūra

[1] A. Dargys and A. Acus, Exponentials of general multivector (MV) in 3D Clifford algebras, Nonlinear Analysis: Modelling and Control (accepted) (2021).

[2] J. M. Chappell, A. Iqbal, L. J. Gunn, and D. Abbott, Functions of multivector variables, PLoS ONE **10**(3), 1–21 (2015), Doi:10.1371/journal.pone.0116943.

[3] E. Hitzer and S. J. Sangwine, Exponential factorization and polar decomposition of multivectors in *Cl(p,q)*, $p+q \leq 3$, Submitted to Adv. Appl. Clifford Algebras (2019), http://vixra.org/abs/1911.0275.

[4] A. Acus and A. Dargys, *Mathematica* package, 2017, https://github.com/ArturasAcus/GeometricAlgebra.